Les candidats auront à leur disposition du papier millimétrique.

L'espace affine euclidien $\mathbf{R}^3$ étant rapporté à un système orthonormé d'axes $Oxyz$, on considère la région sphérique S définie par la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = \cos\varphi \cos\theta \\ y = \cos\varphi \sin\theta \\ z = \sin\varphi \end{cases}$$

avec $\begin{cases} 0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \leqslant \varphi < \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

qui établit une bijection entre S et un rectangle du plan auxiliaire Π, rapporté à deux axes orthonormés $(O'\theta, O'\varphi)$.

Un point de S est donc déterminé par la donnée d'un couple θ, φ.

Deux points A et B de S déterminent avec O un plan dont l'intersection avec S définit un arc de grand cercle $\overset{\frown}{AB}$.

On considère les points distincts $A(\theta_1, 0)$ $B(\theta_2, 0)$ et $C(\theta_3, \varphi_3)$ et on appellera « triangle ABC » la figure formée des trois arcs de grand cercle $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$ et $\overset{\frown}{CA}$.

On rappelle qu'avec le paramétrage choisi, l'aire d'un domaine D de S est mesurée par l'intégrale double $\iint_{D'} \cos\varphi \, d\theta \, d\varphi$ étendue au domaine correspondant $D'(\theta, \varphi)$ du plan auxiliaire Π.

On rappelle enfin la formule de Green-Riemann :

$$\oint P \, d\theta + Q \, d\varphi = \iint_{D'} \left(\frac{\partial Q}{\partial \theta} - \frac{\partial P}{\partial \varphi} \right) d\theta \, d\varphi$$

l'intégrale curviligne étant prise sur le contour limitant D' orienté dans le sens positif.

PREMIÈRE PARTIE

1° Montrer que sur chaque côté du triangle ABC, les paramètres θ et φ sont liés par une relation de la forme

$$\varphi = \text{Arc tg}[K \sin(\theta + \alpha)]$$

où K et α sont des constantes que l'on déterminera pour chaque côté.

2° Tracer sur papier millimétré dans le plan Π les graphes des relations précédentes pour

$$\theta_1 = \frac{\pi}{3}, \qquad \theta_2 = \frac{\pi}{4}, \qquad \varphi_3 = \frac{\pi}{4}.$$

On représentera $\frac{\pi}{2}$ par un segment de 15 cm.

DEUXIÈME PARTIE

1° On considère A'B'C', image dans Π du triangle ABC.

Trouver une 1-forme $\omega = P \, d\theta$ telle que l'intégrale curviligne de ω étendue au contour A'B'C' soit égale à l'aire du triangle ABC.

2° Calculer la valeur Δ de cette intégrale curviligne; elle s'exprime au moyen des fonctions trigonométriques de θ_1, θ_2, φ_2 et de leurs réciproques.

TROISIÈME PARTIE

1° Calculer la longueur des arcs $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$ et $\overset{\frown}{CA}$.

2° En déduire une condition suffisante évidente pour que les longueurs de $\overset{\frown}{CA}$ et $\overset{\frown}{CB}$ soient égales. Cette condition est-elle nécessaire?

QUATRIÈME PARTIE

1° La condition trouvée à la troisième partie, 2°, étant remplie, évaluer les angles intérieurs $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ du triangle ABC. Il peut être commode d'introduire l'angle $\psi = \text{Arc tg } K$, K étant la constante introduite à la première partie.

2° Vérifier la formule de Gauss-Bonnet :

$$\Delta = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi$$

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail